Věta 1 (Fourierova transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)**.** *Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, potom*

1. $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
2. $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$.

Na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i $L(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\int f\mathcal{F}(g) = \int \mathcal{F}(f)g, \quad \int f\mathcal{F}(g) = \int \mathcal{F}(f)g$$

to dává možnost definovat vzoreček $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ pro funkce $f \in L^1$ pro které platí $\mathcal{F}(f) \in L^1$.

Zde využijeme následující fakt: pokud pro $f \in L^1_{loc}$ platí $\int f\phi = 0$, pro všechny $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, potom $f = 0$.

Fourierova transformace na L^2

Je založena na následujích faktech:

1. pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ platí $||f||_2 = ||\mathcal{F}(f)||_2 = ||\mathcal{F}^{-1}(f)||$,
2. prostor $S(\mathbb{R}^d)$ je hustý v L^2,

Volme $f \in L^2$. Je-li $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $||f_n - f||_2 \to 0$. Potom je posloupnost $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ cauchyovská v L^2. Protože je L^2 úplný, má $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ limitu, kterou označíme $\mathcal{F}(f)$. Obdobné pro $\mathcal{F}^{-1}$.

Poznámky a příklady. *1. pro $f \in L^2$ platí*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{U(0,R)} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{U(0,R)} f(x)e^{i2\pi x\cdot\xi}$$

2. takto například spočítáme $\mathcal{F}(\frac{x}{1+x^2})(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$

Nakonec jsme si ukázali, jak za pomocí Fourierovy transformace řešit PDR (na příkladu rovnice $\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = 0$).